Radici dell'unità

Vogliamo trovare le n soluzioni complesse dell'equazione

$$z^n = 1, \quad n\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{C}. \qquad (1)$$

Usando la rappresentazione polare dei numeri complessi, $z = re^{it}$, la (1) diventa

$$r^n e^{int} = 1, \qquad (2)$$

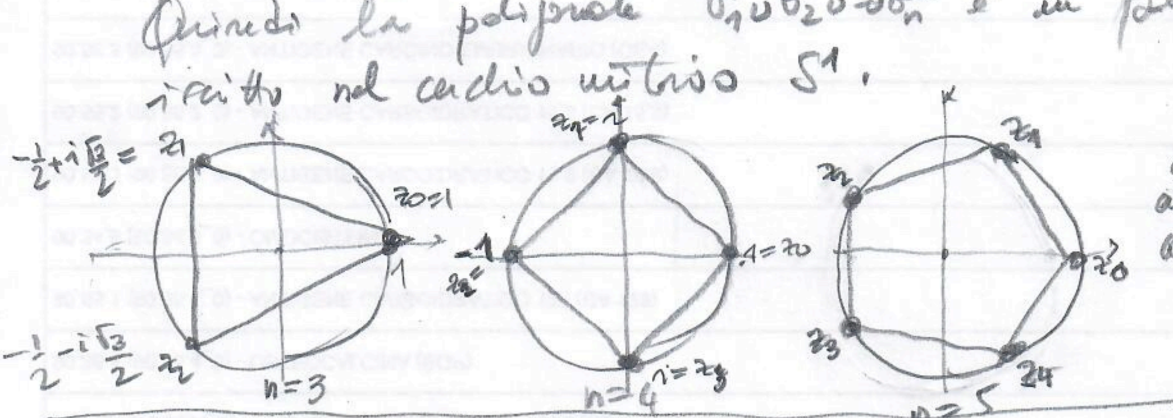
Prendendo il modulo in tale relazione troviamo $r=1$.
Ora $e^{int}=1 \iff nt = 2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, da cui segue

$$t_k := 2\pi\frac{k}{n}. \qquad (3)$$

Le n soluzioni (distinte) di (1) sono quindi date da

$$z_k = e^{it_k}, \quad 0\le k\le n-1 \quad \left(t_k := 2\pi \frac{k}{n}\right)$$

(e se $k\ge n$ si riottengono gli stessi valori).
Si osservi che gli archi di circonferenza tra z_{k-1} e z_k $(1\le k\le n-1)$ sono tutti lunghi $t_k - t_{k-1} = \frac{2\pi}{n}$. È facile vedere che anche i segmenti $\sigma_k := [z_{k-1}, z_k]$ sono tutti lunghi $|e^{i\frac{2\pi}{n}}-1|$ (Es)
Quindi la poligonale $\sigma_1\cup\sigma_2\cup\dots\cup\sigma_n$ è un poligono regolare inscritto nel cerchio unitario S^1.



Si noti la simmetria rispetto all'asse reale, dovuta alla relazione $z^n=1 \iff (\bar z)^n = 1$.

Analogamente si discute l'equazione

$$z^n = w \quad \text{con } w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}. \qquad (4)$$

Se $w=\rho e^{is}$, allora $z = re^{it_k}$ con $r := \rho^{\frac{1}{n}}$ e $t_k = s + 2\pi\frac{k}{n}$, $0\le k\le n-1$.